נושאים במתמטיקה

פרק 4 - יחסים

תוכן העניינים

יחסים

שאלות

1) רשמו במפורש את היחסים כקבוצה של זוגות סדורים.
היחס R המוגדר מעל A להיות $aRb \Leftrightarrow b > a+3$, כאשר:
א. $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$
ב. $A=\{3,5,19,103\}$
ג. $A=\{5,6,7\}$

2) נתונים היחסים הבאים מעל $A=\{1,2,3\}$,
$R_1=\{(1,2),(2,1),(2,3)\}$ $\quad$ $R_2\{(1,2),(2,2),(2,3)(2,1)\}$
עבור כל אחד מארבעת היחסים $R_1\cup R_2$, $R_1\cap R_2$, R_2, R_1,
קבעו האם הוא רפלקסיבי, סימטרי או טרנזיטיבי.
(במקרה של הפרכה הביאו דוגמה מתאימה)

3) לגבי כל אחד מהיחסים הבאים, רשמו שלושה זוגות שנמצאים ביחס, ונמקו מדוע הם ביחס. כתבו שלושה זוגות שאינם ביחס, ונמקו מדוע אינם ביחס. כמו כן, קבעו האם היחס הוא רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, א-סימטרי חלש, חזק, וטרנזיטיבי.
א. יחס $@$ מעל $\mathbb{R}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in @ \Leftrightarrow |x-y|\le 100$.
ב. יחס $\clubsuit$ מעל $\mathbb{Z}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in\clubsuit \Leftrightarrow 3|x-y$.
ג. היחס $\subseteq$ מעל $P(\mathbb{N})$, המוגדר באופן הבא: $(A,B)\in\subseteq \Leftrightarrow A\subseteq B$.
ד. היחס שרגא מעל $\mathbb{R}$, המוגדר באופן הבא: שרגא $(x,y)\in \Leftrightarrow x+y\ge x\cdot y$.
ה. יחס T מעל $\mathbb{Z}$, המוגדר באופן הבא: $x^2+y\ge 1 \Leftrightarrow (x,y)\in T$.

4) מצאו אלו מהתכונות: רפלקסיביות, אנטי-רפלקסיביות, סימטריות, אנטי-סימטריות חלשה, אנטי סימטריות חזקה וטרנזיטיביות, מקיים כל אחד מהיחסים הבאים, מעל הקבוצות $A=\{3,5,7,9\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.
א. $xRy \Leftrightarrow \exists m\in\mathbb{Z}_{odd}\ \ x=my$
ב. $xsy \Leftrightarrow \exists m\in\mathbb{Z}_{evevn}\ \ x=my$
ג. $xRy \Leftrightarrow \exists m\in\mathbb{Z}_{odd}\ \ (x=my \vee y=mx)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

5) תהי $A=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ קבוצת כל הזוגות הסדורים של המספרים הטבעיים,
ויהי $R\subseteq A^2$ יחס המוגדר על ידי $(m_1,n_1)R(m_2,n_2)\Leftrightarrow m_1-m_2=n_1-n_2$.

א. הוכיחו כי R הינו יחס שקילות ב-A.

6) תהי A קבוצה ו-R יחס מעל A הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות.
בכל מקרי ההפרכה תנו דוגמה נגדית מינימלית. בדקו האם יש בדוגמתך פרטים מיותרים והסר אותם.

א. אם R סימטרי, אז R טרנזיטיבי.
ב. אם R אנטי סימטרי חלש, אז R טרנזיטיבי.
ג. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש, אז R טרנזיטיבי.
ד. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש, אז $R=\varnothing$.
ה. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חזק, אז $R=\varnothing$.
ו. אם R טרנזיטיבי וסימטרי, אז R רפלקסיבי.
ז. אם R טרנזיטיבי ואנטי רפלקסיבי, אז R אנטי סימטרי חזק.
ח. אם R טרנזיטיבי ולא סימטרי, אז R אנטי סימטרי חלש.

7) תהי A קבוצה ויהיו R,S יחסים מעל A.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (הפרכה = דוגמה מינימלית):

א. אם R,S רפלקסיביים, אז $R\cap S$ רפלקסיבי.
ב. אם R,S רפלקסיביים, אז $R\cup S$ רפלקסיבי.
ג. אם R,S סימטריים, אז $R\cap S$ סימטרי.
ד. אם R,S סימטריים, אז $R\cup S$ סימטרי.
ה. אם R,S טרנזיטיביים, אז $R\cap S$ טרנזיטיבי.
ו. אם R,S טרנזיטיביים, אז $R\cup S$ טרנזיטיבי.
ז. אם R,S יחסי שקילות, אז $R\cap S$ יחס שקילות.
ח. אם R,S יחסי שקילות, אז $R\cup S$ יחס שקילות.
ט. אם R,S אנטי סימטריים חלש, אז $R\cap S$ אנטי סימטרי חלש.
י. אם R,S אנטי סימטריים חלש, אז $R\cup S$ אנטי סימטרי חלש.

כתב ופתר – טל פלדמן ©